

De perihelium precessie van Mercurius

1. Numeriek model

2p1. Voer de volgende opdrachten uit:

- Vul de modelregel voor $M = \dots$ aan.
- Vul de modelregel voor $a := \dots$ aan.

Voorbeeld van een antwoord:

$$M = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ en } a := G \cdot M / r^2$$

- opzoeken van de massa van de zon
- juiste uitdrukking voor a

2p2. Leg uit waarom geldt: $a_x = -a \cdot x / r$.

Voorbeeld van een antwoord:

De versnelling a is een vector met de componenten a_x en a_y . De positie r is ook een vector met de componenten x en y . Er geldt het volgende verband: $r/x = a/a_x$. Dit leidt tot $a_x = a \cdot x / r$. (Het minteken is het gevolg van de keuze voor de positieve x -richting).

- inzicht dat a en r vectoren zijn met componenten a_x en a_y , en x en y respectievelijk
- completeren

De begincoördinaten van Mercurius in dit computermodel zijn $(46,00 \cdot 10^9, 0)$.

2p3. Leg uit wat de x - en de y -coördinaat van de zon zijn volgens dit model.

Voorbeeld van een antwoord:

Aangezien de perihelium van Mercurius gelijk is aan 46,00 miljoen kilometer komen bovenstaande coördinaten overeen met de situatie dat Mercurius zich in de uiterste stand links bevindt in figuur 1. Dat betekent dat de coördinaten van de zon overeenkomen met $(0, 0)$.

- inzicht dat de x -coördinaat $(46,00 \cdot 10^9)$ overeenkomt met de perihelium van Mercurius
- completeren

Completeer het Coach model dat bij deze opdracht hoort. Simuleer nu de beweging van Mercurius om de zon.

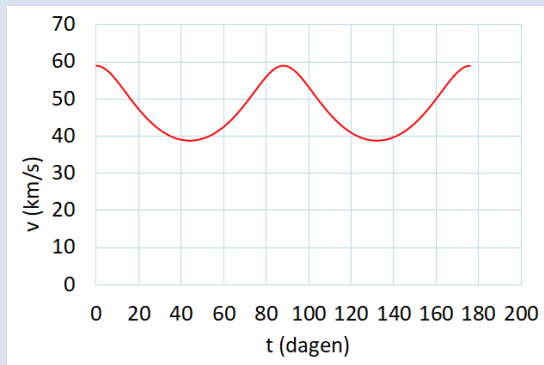
2p4. Bepaal met behulp van de resultaten van de simulatie de waarden van het aphelium en het perihelium. Leg daarbij in beide gevallen duidelijk uit hoe je aan je antwoord komt.

Voorbeeld van een antwoord:

Met behulp van de zoom-functie in Coach zijn de grootste en kleinste afstand van Mercurius tot de zon te bepalen. De coördinaat van de kleinste afstand tot de zon is gelijk aan (46,0 miljoen , 0). De coördinaat van de grootste afstand tot de zon is gelijk aan (-69,9 miljoen , 0). Dat betekent dat de perihelium volgens het numeriek model gelijk is aan PH = 46 miljoen km en de aphelium gelijk is aan AH = (-)69,9 miljoen km.

- inzicht dat de grootste en kleinste x-waarden moeten worden bepaald
- bepalen van PH en AH met een marge van 0,1 miljoen km

De baansnelheid van Mercurius is met behulp van het computer model bepaald (zie figuur 4). Figuur 4 staat ook afgebeeld op de uitwerkbijlage.



Figuur 4

4p5. Bepaal de baanstraal van Mercurius met behulp van figuur 4 op de uitwerkbijlage en vergelijk je antwoord met de waarde die in Binas staat.

Voorbeeld van een antwoord:

In figuur 1 zijn 2 omlopen te zien van Mercurius. Verder geldt dat de afgelegde weg gelijk is aan het oppervlakte onder de grafiek. Op basis van de grafiek is deze afgelegde weg te bepalen:

$s = 49 \cdot 10^3 \cdot 176 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 7,45 \cdot 10^{11} \text{ m}$. Dit betekent dat de baanstraal gelijk is aan:

$r_{\text{baan}} = \frac{1}{2} \cdot 7,45 \cdot 10^{11} / 2\pi = 59 \text{ miljoen km}$. Dit komt goed overeen met de waarde die in Binas staat.

- inzicht dat de afgelegde weg gelijk is aan de oppervlakte onder de grafiek
- bepalen van de afgelegde weg
- inzicht dat de afgelegde weg overeenkomt met 2 omlopen
- completeren (met een marge van 2,0 miljoen km)

2. Schaalmodel

2p1. Beschrijf duidelijk wat er gebeurt met de ellipsbaan van Mercurius.

Voorbeeld van een antwoord:

Wanneer je naar de ellipsbaan van Mercurius kijkt, dan kun je zien dat Mercurius na 1 omwenteling zich niet op dezelfde plaats bevindt als daarvoor. Na 2 omwentelingen is duidelijk te zien dat de ellipsbaan van Mercurius draait.

- inzicht dat de ellipsbaan geen gesloten baan meer is
- conclusie

2p2. Wat is de oorzaak van de perihelium precessie van Mercurius in dit schaalmodel?

Voorbeeld van een antwoord:

De perihelium precessie wordt in het papieren schaalmodel veroorzaakt door het feit dat de vlakke cirkel wordt gekromd tot een kegel. Dit zorgt ervoor dat de ellipsbaan niet langer op zichzelf aansluit. Het gevolg is dat de ellipsbaan gaat draaien. Dit effect wordt perihelium precessie genoemd.

- inzicht dat het platte vlak wordt gekromd tot een kegel
- conclusie

2p3. Wat is de oorzaak van de perihelium precessie van Mercurius volgens de algemene relativiteitstheorie?

Voorbeeld van een antwoord:

Volgens de algemene relativiteitstheorie wordt de ruimtetijd gekromd door de aanwezigheid van (grote) massa's. Deze kromming leidt ertoe dat de perihelium langzaam gaat draaien. In zowel het (papieren) schaalmodel als volgens de algemene relativiteitstheorie is kromming de oorzaak van de perihelium precessie.

- inzicht dat ook volgens de algemene relativiteitstheorie kromming de oorzaak is van de perihelium precessie
- conclusie

1p4. Leg duidelijk uit wat er gebeurt met de perihelium precessie wanneer de kromming toeneemt.

Voorbeeld van een antwoord:

Wanneer de kromming toeneemt dan zal ook de perihelium precessie (per omwenteling) toenemen.

- inzicht dat de perihelium precessie toeneemt als de kromming toeneemt.

3. Rekenopgave

Met behulp van het computer model heb je de aphelium en perihelium van Mercurius kunnen bepalen. Op basis van die waarden kun je de excentriciteit van de baan bepalen.

Voor Mercurius geldt dat $PH = 46,00 \cdot 10^6$ km en $AH = 69,82 \cdot 10^6$ km.

3p6. Toon met behulp van een berekening aan dat de excentriciteit van Mercurius gelijk is aan $e = 0,2057$.

Voorbeeld van een antwoord:

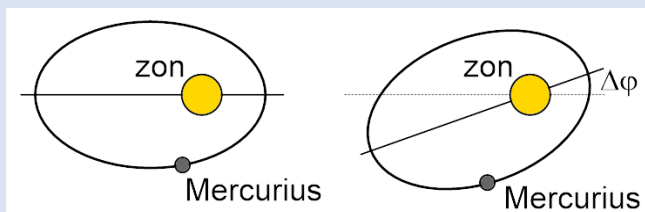
$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{46,00 \cdot 10^9 \cdot 69,82 \cdot 10^9}{\left(\frac{46,00 \cdot 10^9 + 69,82 \cdot 10^9}{2}\right)^2} = 0,0422977$$

$$e = \sqrt{0,0422977} = 0,2057$$

Dit komt overeen met de gegeven waarde voor de excentriciteit van mercurius.

- gebruik van de formule voor e^2
- invullen van de juiste waarden voor a^2 en b^2
- consequente conclusie

Volgens de algemene relativiteitstheorie zorgt de zon voor een kromming van de ruimtetijd. Als gevolg van deze kromming zal de baan van Mercurius elke omwenteling een klein beetje draaien (zie figuur 6). Hierin is $\Delta\phi$ de precessiehoek ten gevolge van de kromming van de ruimtetijd.



Figuur 6

De perihelium precessie van Mercurius is volgens de algemene relativiteitstheorie met behulp van de volgende formule te berekenen:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi \cdot G \cdot M}{a(1-e^2) \cdot c^2} \quad (3)$$

In deze formule is $\Delta\phi$ de precessiehoek (in rad), G is de gravitatieconstante ($6,67384 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$), M massa van het hemellichaam (in kg), d is de loodrechte afstand tussen de lichtstraal en het massamiddelpunt van het hemellichaam (in m) en is c de lichtsnelheid (in m s^{-1}).

4p7. Bereken de perihelium precessie voor Mercurius per omwenteling. Geef je antwoord in booggraden.

Voorbeeld van een antwoord:

Voor de halflange as geldt $a = \frac{AH+PH}{2} = \frac{46,00 \cdot 10^9 \cdot 69,82 \cdot 10^9}{2} = 57,91 \cdot 10^9$ m. De perihelium precessie per omwenteling is in dat geval gelijk aan $\Delta\varphi = \frac{6\pi \cdot 6,674 \cdot 10^{-11} \cdot 1,989 \cdot 10^{30}}{57,91 \cdot 10^9 (1-0,2057^2) \cdot (2,998 \cdot 10^8)^2} = 5,020 \cdot 10^{-7}$ rad. Dat komt overeen met $\Delta\varphi = 360 \cdot \frac{5,020 \cdot 10^{-7}}{2\pi} = 2,876 \cdot 10^{-5}$ booggraden.

- opzoeken G, M en c

- gebruik van $a = \frac{AH+PH}{2}$

- omrekenen van rad naar booggraden

- completeren

Einstein had berekend op basis van de algemene relativiteitstheorie dat de perihelium precessie van Mercurius overeen moest komen met 43 boogseconden per eeuw.

3p4. Toon met behulp van een berekening aan of Einstein gelijk had.

Voorbeeld van een antwoord:

De omlooptijd van mercurius is 88 dagen. Dat betekent dat het totaal aantal omwentelingen per eeuw gelijk is aan $100 \cdot \frac{365,25}{88} = 415$. De perihelium precessie per eeuw is in dat geval gelijk aan $415 \cdot 2,876 \cdot 10^{-5} = 0,01194^\circ$. Dit komt overeen met $0,01194 \cdot 60 \cdot 60 = 42,97 = 43$ boogseconden. De voorspelling van Einstein klopte.

- opzoeken van de omlooptijd van mercurius

- inzicht dat het aantal omwentelingen per eeuw gelijk is aan $100 \cdot \frac{365,25}{88}$

- omrekenen van booggraden naar boogseconden en conclusie